UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y
TECNOLOGÍA DE LA INFROMACIÓN
ESTRUCTURAS DISCRETAS I

GUÍA PRÁCTICA
Funciones

1. Determine si cada una de las siguientes relaciones es una función. Si una relación dada es una función determine su dominio, su codominio y su rango.
   a) $\{(x,y) \mid x,y\in \mathbf{Z},\ y = x^2 + 7\}$, una relación de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$.
   b) $\mathbf{R}$ es una relación de A en B tal que $|A| = 5$, $|B| = 6$ y $|\mathbf{R}| = 6$.
   c) $f = \{(3,x),(2,w),(1,w)\}\subseteq\{1,2,3\}\times\{z,y,x,w\}$.
2. ¿Define la regla $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ una función $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$? ¿Una función $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$? ¿Una función $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$?
3. Sea $\mathbf{f} = \{(x,y)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+ \;/\; |x| = |y - 1|\}$. ¿Es **f** una función? Justifique su respuesta.
4. Sean $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$: Defina $h\colon A\times C \to B\times D$ como
   $$h(a,b) = (f(a),g(b))$$
   Demuestre que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.
5. Sea $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por $g(n) = 2n$. Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $f\colon A \to \mathbf{N}$ está dada por $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$, encuentre gof.
6. Sean $f,g\colon \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$, donde para todo $x\in\mathbf{Z}^+$, $f(x) = x+1$ y $g(x) = \text{máx}\{1,x-1\}$, el máximo de 1 y $x-1$.
   a) ¿Cuál es el rango de f?
   b) ¿Es f una función sobreyectiva?
   c) ¿Es f una función inyectiva?
   d) ¿Cuál es el rango de g?
   e) ¿Es g una función sobreyectiva?
   f) ¿Es g una función inyectiva?
   g) Pruebe que $gof = 1_{Z^+}$
   h) Determine $(fog)(x)$ para x = 2,3,4,7,12,y 25
7. Sea $f\colon \mathbf{Z} \to \{0,1\}$ una función definida por:
   $$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ es par} \\ 1 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$
   ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva? ¿Es f invertible? De ser afirmativa, su respuesta a esta última pregunta, obtenga f^{-1}.
8. Sea $f\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ una función definida por:
   $$f((a,b)) = b$$
   ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva? ¿Es f invertible? De ser afirmativa, su respuesta a esta última pregunta, obtenga f^{-1}.
9. Sea $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ una función tal que
   $$f = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,5),(5,1)\}$$
   ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva? ¿Es f invertible? De ser afirmativa, su respuesta a esta última pregunta, obtenga f^{-1}.
10. Sean $f,g\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ funciones definidas por $f(a) = a+1$ y $g(b) = b^2+2$. Determine:
    a) $(gof)(-2)$
    b) $(fog)(-2)$
    c) $(gof)(x)$
    d) $(fog)(x)$
    e) $(fof)(y)$
    f) $(gog)(y)$
11. Si $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son funciones invertibles, entonces $gof\colon A \to C$ es invertible y $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$. *(Sugerencia: Demuestre que $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = 1_C$ y que $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = 1_A$)*
12. Si **f**: $A \to B$ es una correspondencia biyectiva tal que A y B son conjuntos finitos, entonces ¿*siempre* se cumple que $A = B$? Justifique su respuesta.
13. Si **f**: $A \to B$ es una función inyectiva y **g**,**h**: $B \to C$ son funciones tales que **g**o**f** = **h**o**f**, entonces ¿debe cumplirse que **g** = **h**? Explique.
14. Sea **U** un universo y $A,B\subseteq\mathbf{U}$. Si f_A denota a la función característica de A, demuestre que, para todo $x\in\mathbf{U}$:

a) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x)$.
b) $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$.
c) $f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$.

15. Determine lo siguiente:
a) $\lfloor 2{,}3 - 1{,}6 \rfloor$
b) $\lfloor 2{,}3 \rfloor - \lfloor 1{,}6 \rfloor$
c) $\lfloor 2{,}3 \rfloor - \lceil 1{,}6 \rceil$
d) $\lfloor 3{,}7 \rfloor - \lceil 7{,}3 \rceil$
e) $\lfloor 4\pi \rfloor$
f) $4\cdot\lceil \pi \rceil$
g) $\lceil 1 + \sqrt{29} \rceil + \lfloor 7e \rfloor$
h) $\lceil -\pi\cdot e \rceil$

16. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es falsa, proporcione un contraejemplo.
a) $\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$ para todo $a\in \mathbf{Z}$
b) $\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil$ para todo $a\in \mathbf{R}$
c) $\lfloor a \rfloor = \lceil a \rceil - 1$ para todo $a\in \mathbf{R}-\mathbf{Z}$
d) $\lfloor a \rfloor\cdot\lceil b \rceil = \lceil a \rceil\cdot\lfloor b \rfloor$ para todo $a,b\in \mathbf{R}$
e) $-\lceil a \rceil = \lceil -a \rceil$ para todo $a\in \mathbf{R}$
f) $-\lceil a \rceil = \lfloor -a \rfloor$ para todo $a\in \mathbf{R}$

17. Encuentre todos los números los números reales x tales que:
a) $7\lfloor x \rfloor = \lfloor 7x \rfloor$
b) $\lfloor x + 5 \rfloor = x + 5$
c) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$
d) $\lceil x + 2 \rceil = \lceil x \rceil + 2$

18. Determine *todos* los valores *reales* de **x** que satisfacen la relación $\left\lfloor \dfrac{\lceil \mathbf{x} \rceil}{2} \right\rfloor = 1$.

19. Sea A = {–1,5,39,14,22,–12,3} un sistema completo de restos módulo 7 y f: $\mathbf{Z} \to A$ una función módulo 7. Encuentre:
a) f(117)
b) f(–67)
c) f(7k – 2) con $k\in\mathbf{Z}$
d) x e y enteros tales que $f(x) + f(y) \equiv 0$ (mód 7)

20. Sea A = {1,2,3,4,5,6}, definimos las funciones permutaciones p_1 y p_2 de A como sigue:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtenga:
a) p_1^{-1}
b) $p_1 o p_2$
c) $p_2 o p_2$
d) $p_2 o p_1$

21. Sea A = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Obtenga:
a) (3,5,7,8)o(1,3,2)
b) (2,6)o(3,5,7,8)o(2,5,3,4)

22. Sea A = {a,b,c,d,e,f,g}. Obtenga:
a) (a,f,g)o(b,c,d,e)
b) (f,g)o(b,c,f)o(a,b,c)

23. Sea A = {1,2,3,4,5,6,7,8}. Escriba cada permutación como el "producto" de transposiciones:
a) (2,1,4,5,8,6)
b) (3,1,6)o(4,8,2,5)

24. Sea f: $\mathbf{Z} \to A$ una *función módulo 6* donde A = {–12,16,–1,3,–4,7} es un *sistema completo de restos módulo 6*. Responda lo siguiente:
(a) Obtenga f(154), f(–97) y f(12k – 5), donde $k\in\mathbf{Z}$.
(b) Determine un conjunto $B\subset\mathbf{Z}$, $B\neq A$, de manera que $f|_B$ (la restricción de f a B) sea una *función biyectiva*.

25. Sea **U** = {0,1,2,3,4}. Definimos las *funciones permutación* p_1,p_2: $\mathbf{U} \to \mathbf{U}$ como sigue:

$p_1 = (0,3)o(2,4,1)$
$p_2(x) = y$ si y sólo si $2x \equiv y$ (mód 5)

Responda lo siguiente:
(a) Complete la segunda fila de cada una de las siguientes matrices con las imágenes correspondientes:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & & \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

(b) Obtenga $p_1 o p_2^{-1}$.
(c) ¿Es p_1 una *permutación cíclica*? ¿Es p_2 una *permutación cíclica*?. De ser afirmativa alguna de las respuestas (¡o las dos!), indique, además, la longitud del ciclo.

(d) Sea f_A: $\mathbf{U} \to \{0,1\}$ la *función característica* de $A = \{1,3,4\}$. La composición $f_A o p_1$ es la *función característica* de un conjunto $B \subseteq \mathbf{U}$. Obtenga a B por extensión.

26. Sea g: $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ con $g(n) = 2n$ y sea h: $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ con $h(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

   (a) ¿Son g y h funciones *inyectivas*?
   (b) ¿Son g y h funciones *sobreyectivas*?
   (c) ¿Sucede que $g(h(n)) = n$? Justifique su respuesta.
   (d) ¿Sucede que $h(g(n)) = n$? Justifique su respuesta.
   (e) ¿Son g y h respectivas *funciones inversas* una de la otra? Justifique.

27. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y ρ,σ: $A \longrightarrow A$ funciones permutación tales que $\sigma = (1,2,3)o(5,6,8,9)$ y $\rho = (3,5,2)o(8,6,1,4)$. Encuentre *dos soluciones* τ de la ecuación:

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \rho$$

28. Sean f: $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$, definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil$, el conjunto $A = \{-7,10,-4,2,9\}$ *(un sistema completo de restos módulo 5)* y g: $\mathbf{Z} \to A$ una función módulo 5. Calcule $(gof)(5\pi^3)$.

29. Sea $A = \{-4,16,-11,0,11,3\}$ un sistema completo de restos módulo 6. Considere la *función permutación* $\mathbf{p}$: $A \to A$ definida por $\mathbf{p}(x) = y$ si y sólo si $x+1 \equiv y$ (mód 6). Además, considere la *función módulo 6*, $\mathbf{f_6}$: $\mathbf{Z} \to A$. Determine $(\mathbf{p} o \mathbf{f_6})(-23)$.

30. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y σ: $A \longrightarrow A$ una función permutación tal que $(123)\sigma(5432) = (123456)$. Obtenga σ.